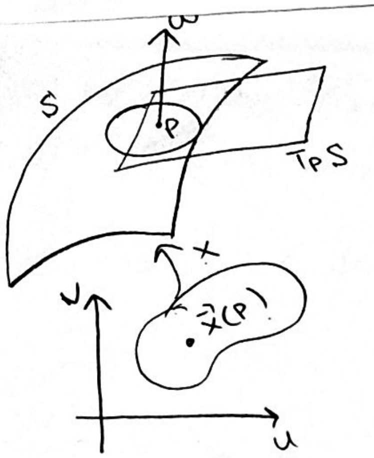
Διάλεξη 19η

16/12/19

Διαφορική Γεωμετρία

Κύριες διευθύνσεις

Ορ: Το διάνυσμα $w \in T_pS \setminus \{0\}$ καλείται κύρια διεύθυνση ανν είναι ιδιοδιάνυσμα της απεικόνισης Weingarten $L_p : T_pS \to T_pS$



• $w = aX_u + bX_v$ είναι κύρια διεύθυνση $\iff$

$$\begin{vmatrix} b^2 & -ab & a^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

$E, F, \ldots$ υπολογίζονται στο $X^{-1}(p)$

• Η κανονική καμπύλη $c(t) = X(u(t), v(t))$ είναι καμπύλη καμπυλότητας:

$$\begin{vmatrix} (v'(t))^2 & -u'(t)v'(t) & (u'(t))^2 \\ E(u(t)\ldots) & F(\ldots) & G(\ldots) \\ e(\ldots) & f(\ldots) & g(\ldots) \end{vmatrix} = 0$$

Εάν οι παραμετρικές καμπύλες του X είναι καμπύλες καμπυλότητας και ισχύει $k_1 > k_2$. Τότε $X_u \perp X_v$, δηλαδή

$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0.$

$f = \langle LX_u, X_v \rangle = \langle$ πολλ του $X_u, X_v \rangle = 0$

$F = 0 = f$

$V, n : \langle\, , \rangle$

$A : V \to V$. Av $\quad Av = \lambda v$, $\quad Aw = \mu w$, $\lambda \neq \mu \Rightarrow v \perp w$

$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$

$\lambda \langle v, w \rangle = \mu \langle v, w \rangle$

Γραμμές καμπυλότητας:

Ορ: Μια καμπύλη $c: I \to S$ καλείται γραμμή καμπυλότητας (ή καμπύλη) $\iff$ $c'(t)$ είναι κύρια διεύθυνση, $\forall t \in I$.

$$c(t) = X(u(t), v(t))$$

$$c'(t) = u'(t) X_u(u(t), v(t)) + v'(t) X_v(u(t), v(t))$$

Πρόταση: Η καμπύλη $c(t) = X(u(t), v(t))$ είναι γρ. καμπυλότητας $\iff$

$$\begin{vmatrix} v'(t)^2 & -u'(t)v'(t) & (u'(t))^2 \\ E(u(t),v(t)) & F(u(t),v(t)) & G(u(t),v(t)) \\ e(u(t),v(t)) & f(u(t),v(t)) & g(u(t),v(t)) \end{vmatrix} = 0$$

Θεώρημα: Έστω S επιφάνεια της οποίας οι κύριες καμπυλότητες $k_1 > k_2$. Τότε οι παραμετρικές καμπύλες ενός συστήματος συντ/νων $X: U \to S$ είναι γραμμές καμπυλότητας $\iff F = 0 = f$

Θεώρημα RODRIGUES: Μια καμπύλη $c: I \to S$ είναι γραμμή καμπυλ. $\iff$ $(N \circ c)'(t) = \lambda(t) c'(t)$, $\forall t \in I$

Αποδ

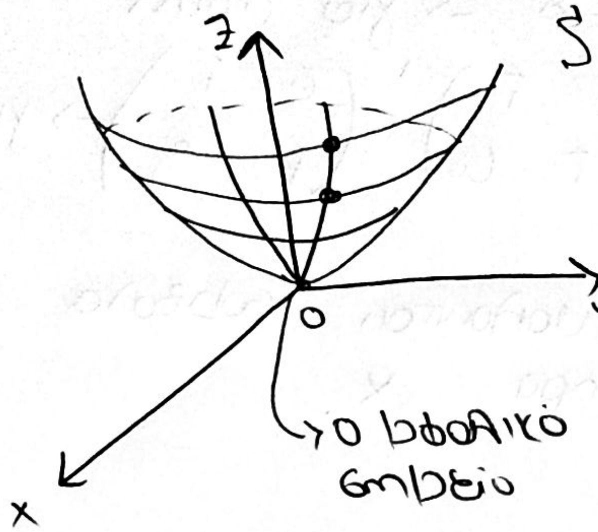
Η c είναι γραμμή καμπ. $\iff L_{c(t)} c'(t) = \lambda(t) \cdot c'(t)$

$\iff -dN_{c(t)}(c'(t)) = \lambda(t) c'(t) \iff -(N \circ c)'(t) = \lambda(t) \cdot c'(t)$

$\iff (N \circ c)'(t) = -\lambda(t) c'(t) \iff (N \circ c)'(t) \parallel c'(t) \iff$

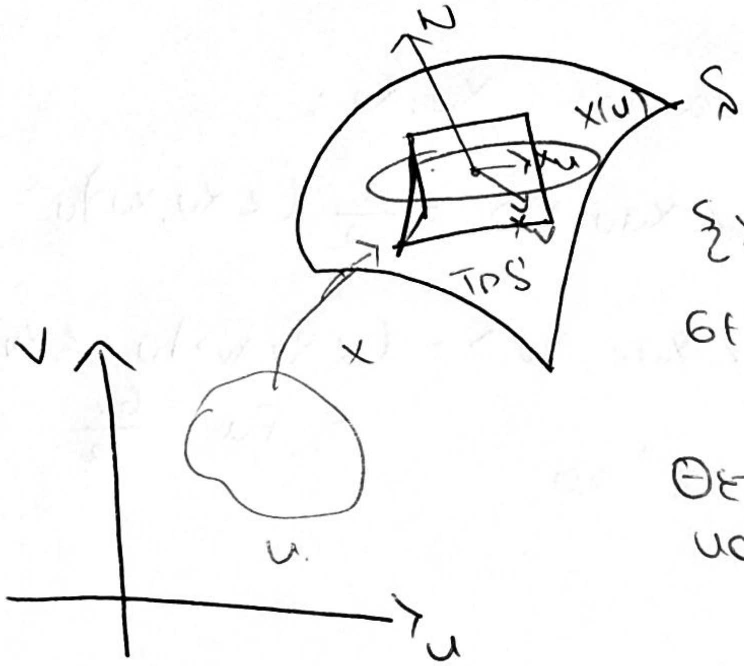
$\iff (N \circ c)'(t) \times c'(t) = 0$

Π.Χ.



$S: \; z = x^2 + y^2 = h(x,y)$

$$K = \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^2} = \frac{4}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^2} > 0$$



$\{X_u, X_v, N\}$: Βάση $\mathbb{R}^3$ σε κάθε σημείο επί $X(U)$.

Θέτω $u \rightsquigarrow 1$
και $v \rightsquigarrow 2$.

$\langle N, N \rangle = 1$,
$\langle N_u, N \rangle = 0$

$$X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + \cancel{\gamma_{11} N}^{\,e}$$
$$X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + \cancel{\gamma_{12} N}^{\,f}$$
$$X_{vu} = \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + \cancel{\gamma_{21} N}^{\,f}$$
$$X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + \cancel{\gamma_{22} N}^{\,g}$$

Εφαπτομενικό μέρος
Τύπου Gauss

$$-LX_u = N_u = b_{11} X_u + b_{12} X_v$$
$$-LX_v = N_v = b_{12} X_u + b_{22} X_v$$

Κάθετο μέρος
Τύποι Weingarten

$\langle X_{uu}, N \rangle = \gamma_{11} \Rightarrow \gamma_{11} = e \rightarrow$ για Gauss

$-(b_{ij}) = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \rightarrow$ για weingp

Οι συντελεστές Γ_{ij}^{n} καλούνται σύμβολα Christoffel ως προς X.

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k}.$$

Πολλ/ντας εσωτερικά με X_u, X_v:

$$\boxed{\begin{aligned} E\Gamma_{11}^{1} + F\Gamma_{12}^{1} \\ E\Gamma_{11}^{1} + G\Gamma_{12}^{1} \end{aligned}}$$

$E\Gamma_{11}^{1} + F\Gamma_{12}^{1} = \langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2}(\langle X_u, X_u \rangle)_u = \frac{1}{2}E_u$

$E\Gamma_{11}^{1} + G\Gamma_{12}^{1} = \langle X_{uv}, X_v \rangle = (\langle X_v, X_u \rangle)_u - \langle X_v, X_{uv} \rangle$

$= F_u - \frac{G_v}{2}$

$\Delta \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2 > 0.$

$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k : U \to \mathbb{R}$ καλούνται σύμβολα Christoffel.

Λήμμα: Τα σύμβολα Christoffel εξαρτώνται από τα E, F, G και τις παραγώγους 1ης τάξης.

$u : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$u(x,y)$

$u_x = f$

$u_y = g$

$u_{xy} = u_{yx} \Rightarrow f_y = g_x$

$$\left.\begin{aligned} (x_{uu})_v &= (x_{uv})_u \\ (x_{uv})_v &= (x_{vv})_u \\ N_{uv} &= N_{vu} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow A_i x_u + B_i x_v + C_i N = 0, \quad i = 1,2,3$$

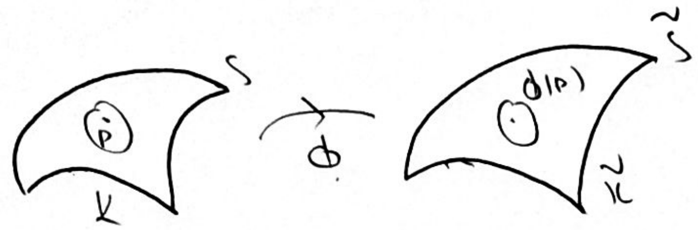
$$B_1 = \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + e b_{22} + (\Gamma_{11}^2)_v - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2 - f b_{21} - (\Gamma_{12}^2)_u$$

$$B_1 = 0 \overset{b_{22} = \dots}{\underset{b_{21} = \dots}{\Leftrightarrow}} \dots (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^2 =$$

$$= -E \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -EK \Longrightarrow B_1 = -EK$$

Έξοχο Θεώρημα: Η καμπυλότητα Gauss εξαρτάται μόνο από τα E, F, G και τις παραγώγους τους έως 2ας τάξης.

Πόρισμα: Αν $S, \tilde{S}$ είναι τοπικά ισομετρικές επιφάνειες και $\phi: S \to \tilde{S}$ τοπική ισομετρία, τότε $\forall p \in S$; $K(p) = \tilde{K}(\phi(p))$



Εξισώσεις Mainardi - Codazzi:

$$\begin{cases} e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 \\ f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2 \end{cases}$$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

Ύπαρξη: Δίνονται συναρτήσεις E, F, G, e, f, g: $U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, οι οποίες πληρούν $E>0$, $G>0$, $EF - G^2 > 0$ και τις εξισώσεις Gauss, Mainardi - Codazzi. Τότε $\forall p_0 \in U$ $\exists$ $U_0 \subseteq U$ και $X: U_0 \to \mathbb{R}^3$ κανονική παραμετρική επιφάνεια με θεμελ. ποσά $1^{ης}$, $2^{ης}$ τάξης τις δοθ. συναρτήσεις e, f, g.

Μοναδικότητα: Αν $\tilde{X}: U_0 \to \mathbb{R}^3$ είναι μια άλλη επιφάνεια, όπως στο (I), τότε $\exists$ $T \in Isom(\mathbb{R}^3)$, $\tilde{X} = T \circ X$

Υπάρχει επιφάνεια με $e = g = 1$, $f = 0$ και καμπυλότητα Gauss $K = 0$.